

Année universitaire 2024/2025

Mathématiques et Applications - 1^{re} année de Master - Majeure Mathématiques Approfondies

Crédits ECTS : 60

LES OBJECTIFS DE LA FORMATION

La majeure "Mathématiques Approfondies" propose une formation renforcée dans le domaine de l'analyse (analyse fonctionnelle, analyse convexe) et des probabilités (analyse approfondie des processus).

La formation est en anglais.

Les débouchés naturels sont les Masters 2 en Sciences des données (M2 MASH), en mathématiques financières (M2 MASEF) ou en mathématiques plus théoriques (M2 MATH).

La formation a pour objectif de développer les compétences de nos étudiant-e-s par la consolidation des fondements théoriques et pratiques en analyse (analyse fonctionnelle, calcul numérique, ...), probabilités (modélisation stochastique, théorie des processus, ...) et statistiques (modélisation stochastique, méthodes d'apprentissage, ...), tout en permettant l'ouverture à d'autres disciplines (finance et actuariat).

Les objectifs de la formation :

- Acquérir de solides connaissances en mathématiques appliquées (probabilités et statistiques, optimisation et analyse numérique).
- Découvrir l'activité en mathématiques et se confronter à des problématiques ouvertes et actuelles.
- Développer les compétences de nos étudiants par la consolidation des fondements théoriques et pratiques en analyse (analyse fonctionnelle, calcul numérique, ...)
- Permettre l'ouverture à d'autres disciplines (finance et actuariat).

PRÉ-REQUIS OBLIGATOIRES

- Titulaires d'un diplôme BAC+3 (180 crédits ECTS) ou équivalent à Dauphine, d'une université ou d'un autre établissement de l'enseignement supérieur dans les domaines suivants : cursus scientifique, mathématiques.
- Attestation de maîtrise de la langue française pour les étudiantes et étudiants étrangers.

PROGRAMME DE LA FORMATION

- Semestre 1
 - UE Fondamentales S1
 - Discrete processes
 - Optimization
 - Functional analysis
 - UE de majeure Mathématiques Approfondies S1
 - Control of Markov chains
 - Monte-Carlo methods
 - UE Complémentaires S1
 - Anglais 1

- UE Optionnelles S1
 - Linear models and generalizations
 - Portfolio management
 - Série temporelles
 - Classical Gravitation
 - Espagnol 1&2
 - Allemand 1&2
- Semestre 2
 - UE Fondamentales S2
 - Brownian motion and evaluation of contingent claims
 - Poisson process
 - Advanced continuous process
 - UE de majeure Mathématiques Approfondies S2
 - Advanced convex analysis
 - UE Complémentaires S2
 - Anglais 2
 - Mémoire de M1
 - UE Optionnelles S2
 - Méthodes numériques : problèmes dépendant du temps
 - Statistique non paramétrique
 - Statistical learning
 - Geometry and differential equations
 - Gravitation of extended bodies and galaxies
 - Espagnol 1&2
 - Allemand 1&2
 - Numerical optimization
 - Certificat
 - SAS, Excel, Matlab

DESCRIPTION DE CHAQUE ENSEIGNEMENT

Advanced continuous process

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Processus à temps continu, mouvement brownien, notions sur les EDS, applications en finance (B & S) et en physique (diffusions).

Compétence à acquérir :

Ce cours est une introduction au calcul stochastique. Il vise en particulier à donner aux étudiants souhaitant suivre des cours de finance mathématique les bases nécessaires à la compréhension des objets manipulés. Il est aussi nécessaire pour les étudiants voulant poursuivre leurs études en Statistique des processus.

Advanced convex analysis

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

1. Ensembles convexes (intérieur, fermeture, intérieur relatif, points extrémaux, jauge...)
2. Régularité des fonctions convexes (continuité, dérivée directionnelle, différentiabilité).
3. Hahn-Banach analytique et géométrique, applications (théorèmes de séparation, Farkas et Krein Millman).
4. Optimisation : conjuguée de Fenchel, sous différentiels (sous différentiel d'une somme), cône normal, KKT, théorème de Fenchel-Rockafellar.
5. Convexité et convergence faible (dans les espaces de Hilbert), application à l'algorithme du point proximal.

Compétence à acquérir :

Introduction aux principaux aspects de l'analyse convexe (géométrie, analytiques) et à ses applications en optimisation.

Allemand 1&2

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Selon le groupe de niveau :

débutants: apprentissage de langue de tous les jours, qui permet faire passer des informations simples et de répondre à des besoins concrets (comme faire ses courses); découverte de faits de société et d'éléments culturels des pays de langues allemande

"recommençants": réactivation des savoirs acquis dans le secondaire; approfondissement des compétences écrites et orales; grammaire; exposés; jeux de rôle; découverte de faits de société et d'éléments culturels des pays de langues allemande

avancés: approfondissement des compétences écrites et orales à partir de documents authentiques ; grammaire; exposés; jeux de rôle; rédaction de CV et entraînement à l'entretien d'embauche; découverte de faits de société et d'éléments culturels des pays de langues allemande

Compétence à acquérir :

Les étudiants seront répartis en groupes de niveau: débutants (étudiants n'ayant **jamais** suivi de cours d'allemand), "recommençants" (A1-A2) ou avancés (B-C).

groupes des étudiants recommençants ou des avancés : Le but visé est de rendre l'étudiant capable de communiquer dans le cadre de la vie de tous les jours, et si possible également dans celui du monde professionnel. Pour ce faire, on s'attachera non seulement à développer par des activités variées ses savoir-faire linguistiques fondamentaux dans les quatre domaines classiques (compréhension de l'écrit et expression écrite, compréhension orale et expression orale), mais aussi à lui donner des informations propres au monde germanophone afin de lui permettre de mieux connaître la culture des différents pays de langue allemande. Autant de connaissances qui permettront à l'étudiant de disposer d'atouts pour s'intégrer dans le monde du travail de l'aire germanophone.

Mode de contrôle des connaissances :

100% contrôle continu

Bibliographie, lectures recommandées :

Des conseils de lecture et des adresses de sites internet seront fournis à la rentrée par l'enseignant.

Anglais 1

ECTS : 2

Description du contenu de l'enseignement :

Contenu : professionnels, culturels, d'actualité et de société

Forme : débats, jeux de rôles, quiz et activités ludiques

Méthodologie : prise de parole en public, travail sur l'expression orale

Thématiques au programme: Inclusion & exclusion, Thinking outside the box

Compétence à acquérir :

Savoir s'exprimer à l'oral

Améliorer ses compétences langagières et communicationnelles

Enrichir son vocabulaire

Développer sa créativité

Travailler en équipe

Mode de contrôle des connaissances :

100% contrôle continu

3 notes : jeu de rôles +présentation orale + note d'oral

Anglais 2

ECTS : 2

Description du contenu de l'enseignement :

Contenu : professionnel, culturel, d'actualité et de société

Forme : débats, jeux de rôles, quiz et activités ludiques

Méthodologie : prise de parole en public, travail sur l'expression orale

Thématique au programme: The professional world, Finance

Compétence à acquérir :

Savoir s'exprimer à l'oral

Améliorer ses compétences langagières et communicationnelles

Enrichir son vocabulaire

Développer sa créativité

Travailler en équipe

Mode de contrôle des connaissances :

100% contrôle continu

3 notes : jeu de rôles +présentation orale + note d'oral

Brownian motion and evaluation of contingent claims

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Évaluation d'actifs contingents en absence d'opportunités d'arbitrage : cadre du temps discret opportunités d'arbitrage ; stratégies de réplication et évaluation ; modèle de Cox-Ross et Rubinstein.

Introduction au calcul stochastique en temps continu (mouvement Brownien ; intégrale d'Itô).

Modèle de Black et Scholes (modèle de marché en temps continu ; équation de Black et Scholes et prix d'options ; définition et utilisation des grecques).

Compétence à acquérir :

Étude du mouvement Brownien et son utilisation pour la modélisation des prix des actifs financiers. Présenter la méthodologie de l'évaluation d'actifs en Absence d'opportunités d'Arbitrage dans des modèles en temps continu et présenter le modèle de Black et Scholes.

Classical Gravitation

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

1. Reminder on basic mechanics :

- Galilean reference frame
 - Newton's law
 - energy (kinetic, potential...)
 - body in rotation (kinetic moment etc...)
2. The problem has two bodies :
- formalization (absolute and relative movement)
 - polar coordinates
 - body trajectories (study of the conic in detail)
 - Kepler's law
3. Introduction to the problem with N bodies (very short, will be treated in detail in semester 2)

Compétence à acquérir :

Gravity is one of the key elements for understanding the properties and the evolution of the universe. From a planetary orbit to the one of a star in its galaxy, gravitation is one of the most important engines in the Universe.

The objective of this course is to study in detail the Newtonian gravitation around the two-body problem up to the N-body problem.

Control of Markov chains

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Rappels et compléments sur les chaînes de Markov et les temps d'arrêt.

Analyse du problème d'arrêt optimal en horizon fini.

Stratégies optimales et chaînes de Markov contrôlées.

Compétence à acquérir :

Introduire à travers l'étude de cas simples les idées du contrôle stochastique et montrer l'importance de ces idées dans des applications courantes, en finance notamment.

Discrete processes

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Espérance conditionnelle.

Martingales. Stratégies. Convergence des martingales. Arrêt optionnel.

Chaînes de Markov.

Compétence à acquérir :

Introduction à la modélisation aléatoire dynamique.

Espagnol 1&2

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Contenu selon le niveau du groupe, approche actionnelle : entraînement à la prise de parole en continu et en interaction (réagir, dialoguer) et à la compréhension écrite et orale : repérer les informations principales d'un texte, comprendre l'essentiel d'un document audio et/ou vidéo.

Le but visé est de rendre, à chaque niveau, l'étudiant capable de **communiquer** non seulement dans le cadre de la vie de tous les jours, mais aussi dans celui du monde professionnel avec des interlocuteurs natifs.

Compétence à acquérir :

Les étudiants seront divisés par groupes de niveau à l'issue d'un test qui sera organisé en début d'année (débutants acceptés).

Les activités seront adaptées en fonction du niveau des apprenants (depuis le niveau A1 jusqu'au niveau B2/C1, en fonction du groupe d'affectation). Les étudiants s'entraîneront principalement à la compréhension et à la production orale. L'objectif sera d'amener chaque étudiant, en fonction de son niveau de départ, à **développer son autonomie langagière**. L'accent sera également mis sur la connaissance des conventions sociales et des référents culturels propres au monde hispanique.

Mode de contrôle des connaissances :

100% Contrôle Continu

Présence requise à tous les cours (cours annuel, inscription pour les semestres 1 & 2).

Functional analysis

ECTS : 8

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 39h00

TD : 39h00

1. Exemples d'EDP, formules de représentation, principe du maximum
2. Espaces de Sobolev en dimension $d=1$ et résolution d'équations elliptiques linéaires par Lax-Milgram.
3. Compacité. Théorème d'Ascoli.
4. Convergence faible (cadre hilbertien)
5. Introduction au calcul des variations
6. Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts.

Compétence à acquérir :

Le cours présente des méthodes d'analyse fonctionnelle pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

Geometry and differential equations

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

CM : 19h30

TD : 19h30

1. Reminders on calculus (derivatives for functions with several variables, local inversion ...)
2. Submanifolds of a Euclidean space
3. Introduction to Riemannian geometry
4. Differential equations; existence and uniqueness of solutions
5. Explicit solutions of differential equations
6. Autonomous equations, equilibria and their stability

Compétence à acquérir :

This class provides an introduction to differential geometry and differential equations.

Gravitation of extended bodies and galaxies

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Dynamics of extended bodies and point-mass N-body systems (1/3)

Extended body :

angular velocity, kinetic moment, inertia tensor.

Euler-Liouville equation, application to the free rotation of the Earth principle of the gyroscope , solid body potential librations of a body, application to the Moon

Point-mass N-body system :

Restricted three body problem, lagrangian points perturbation theory, mean motion resonances and secular resonances stability criteria, chaos introduction to numerical integration

Milky Way and galaxies (2/3)

Morphological and kinematical properties of star clusters, galaxies, and galaxy clusters

Virial theorem, Boltzmann equation, Poisson equation, Jeans theorem, relaxation, characteristic times

Spherical potentials, axial potentials, epicyclic motion, Lindblad and other resonances spiral structures, density waves, instabilities

Galaxy interactions : tidal streams, introduction to N-body simulations

Compétence à acquérir :

Gravity is involved in one way or another in all astrophysical fields. It is therefore necessary to go beyond the 2 point body system, as seen in the first semester. The understanding of the dynamics of an extended body and an N-body system allows to deepen the understanding of classical gravitation up to the study of the dynamics of a galaxy.

This lecture is a natural extension of the gravity course of the first semester. The primary objective is to understand in more detail the dynamics of an extended body and a multi-particle system. This will provide the physical and mathematical basis for studying the dynamics of a galaxy and begin to lay the foundations for the study of extragalactic objects.

Linear models and generalizations

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

TP : 7h30

Modèle linéaire (gaussien et non gaussien) : estimateur des moindres carrés ordinaire, intervalles de confiance et de prédiction, test de Student et test de Fisher.

Critères de sélection de modèle (Cp de Mallows, AIC, BIC) et procédures de sélection de variables (forward, backward).

Analyse de la variance à un et deux facteurs.

Modèles linéaires généralisés, formalisation, modèles logit, probit, tobit et généralisations.

Compétence à acquérir :

Ce cours vise à décrire la construction et l'analyse des divers modèles paramétriques de régression linéaire et non-linéaire reliant un groupe de variables explicatives à une variable expliquée. Il inclut également des TP en R.

Mode de contrôle des connaissances :

Partiel, examen et projet.

Monte-Carlo methods

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 10h30

TD : 6h00

TP : 24h00

- Introduction de la méthode de Monte-Carlo
- Méthodes de simulation de variables aléatoires
- Techniques de réduction de variance

Compétence à acquérir :

L'objectif de ce cours est d'introduire les méthodes dites de Monte-Carlo. Ces méthodes sont utilisées pour calculer des espérances (et par extension des intégrales) par simulation de variables aléatoires. La simplicité de la méthode, sa flexibilité et son efficacité pour les problèmes en grande dimension en font un outil intéressant pour des domaines d'applications variés allant de la physique à la finance de marché. L'objectif de ce cours est non seulement de fournir les bases théoriques des méthodes de Monte-Carlo, mais aussi de fournir les outils pour leur utilisation pratique.

Mode de contrôle des connaissances :

- Examen écrit (70% de la note finale)
- Contrôle continu (30% de la note finale). Le contrôle continu se compose d'un projet à la maison et d'un TP noté en séance, tous deux à réaliser avec le langage de programmation R.

Bibliographie, lectures recommandées :

- C.P.Robert and G.Casella. Monte Carlo Statistical Methods. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag New York, 2^e édition, 2004.
- B. Ycart. Modèles et Algorithmes Markoviens, volume 39 of Mathématiques et Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

Mémoire de M1

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Rédaction d'un projet par groupe de 2 ou 3 étudiants sur un thème proposé par un enseignant de la majeure suivie.

Compétence à acquérir :

Approfondissement et/ou la mise en pratique d'un thème de la majeure suivie à travers la rédaction d'un projet.

Méthodes numériques : problèmes dépendant du temps

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé : CM : 16h30, TD : 12h00, TP : 12h00

- Introduction
- Équations Différentielles Ordinaires : Euler Implicite, Runge Kutta, consistance, stabilité, A-stabilité
- applications des EDO : épidémiologie
- Calcul de dérivée et contrôle: graphe computationnel, différentiation automatique
- application du calcul de dérivée: deep learning
- Équations Différentielles Stochastiques : Euler Maruyama, Milstein
- applications de EDS: calcul d'options en finance sur modèle log-normal

Compétence à acquérir :

Présentation de méthodes de résolution numérique des problèmes d'évolution et d'éléments d'analyse numérique. Cours théorique mais aussi une forte partie implementation (en python).

Bibliographie, lectures recommandées :

[site de Gabriel Turinici \(aller au cours en question\)](#)

Numerical optimization

ECTS : 4

Optimization

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Optimisation dans \mathbb{R}^n (cas général et cas convexe).

Optimisation sous contraintes d'égalités et d'inégalités : KKT, cas convexe, lemme de Farkas, dualité, méthodes numériques (gradient projeté, Usawa).

Programmation dynamique en temps discret (problèmes en horizon fini, problèmes en horizon infini avec coût escompté).

Calcul des variations. Introduction à la théorie du contrôle optimal (principe de Pontriaguine, équation de Hamilton-Jacobi-Bellman).

Compétence à acquérir :

L'objectif de ce cours est d'étudier, d'une part, l'optimisation sous contraintes dans \mathbb{R}^n et, d'autre part, les techniques de programmation dynamique déterministe qui sont fondamentales dans les applications.

Mode de contrôle des connaissances :

Examen sur table (mi-semester et fin de semester).

Poisson process

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

- Définitions et propriétés importantes des processus de Poisson (loi jointe des temps sauts, comportements asymptotiques).
- Définitions et propriétés importantes des processus de Markov à espace d'états dénombrable.

Compétence à acquérir :

Introduction des processus à temps continus fondamentaux en probabilités, tels que les chaînes de Markov à espace d'états dénombrable.

Portfolio management

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Théorie de Markowitz pour le choix de portefeuille (critère moyenne-variance ; notion de portefeuille efficient ; mesure de risque : la Value at Risk)

Le Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers (MEDAF) (équilibre du marché ; notion de portefeuille de marché et application à la gestion de SICAV ; mesure de performance et notion de beta d'un portefeuille).

APT et modèles à facteurs : fondements et pratiques empiriques. Critique empirique du CAPM. L'approche de Ross. Bases d'un modèle statique à facteurs. Mises en œuvre empiriques, difficultés pratiques. Interprétations économiques des facteurs. Conséquences pour la gestion.

Assurance de portefeuille.

Compétence à acquérir :

Ce cours est une introduction aux méthodes quantitatives de traitement des données financières et de gestion de portefeuille. L'objectif du cours est de donner un bagage minimal en théorie moderne de la gestion quantitative afin de pouvoir traiter des problèmes pratiques de finance de marché et d'aborder les cours plus spécialisés de finance ou d'économétrie.

SAS, Excel, Matlab

ECTS : 0

Description du contenu de l'enseignement :

Apprentissage de SAS, Excel, Matlab.

Compétence à acquérir :

Mise à niveau sur les logiciels SAS, Excel, Matlab, susceptibles d'être utilisés en projet et souvent exigés pour les stages.

Mode de contrôle des connaissances :

QCM en fin de cours

Statistical learning

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

- Introduction à l'apprentissage statistique : Apprentissage supervisé/non-supervisé, Régression et Classification, Procédure générale d'apprentissage, Évaluation du modèle, Sur et Sous-apprentissage.
- Méthode des K plus proches voisins et notion de "curse of dimensionality".
- Régression linéaire en grande dimension, sélection des variables et régularisation du modèle (Ridge et Lasso).
- Méthodes classiques pour la classification supervisée.
- Algorithme du gradient (descente classique, stochastique et mini-batch) (optionnel).
- (Non-supervisé) K-means clustering.

Compétence à acquérir :

Connaître les bases de l'apprentissage statistique et les méthodes les plus courantes, en particulier dans un contexte de grande dimension.

Mode de contrôle des connaissances :

Examen partiel, Projet (en Python), Examen Final

Statistique non paramétrique

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

- 1 Introduction et rappels
- 2 Estimation de la fonction de répartition
- 3 Tests robustes
- 4 Estimation de densités par estimateurs à noyau
- 5 Régression non paramétrique

Compétence à acquérir :

Décrire les méthodes d'analyse statistique qui permettent de s'affranchir de la connaissance d'un modèle de forme trop contraint; prise de conscience des hypothèses de modélisation.

Série temporelles

ECTS : 4

Description du contenu de l'enseignement :

Volume horaire détaillé :

CM : 19h30

TD : 19h30

Échantillonnage

Quantification

Compression sans perte et correction d'erreurs

L'algorithme FFT

Filtres numériques

Conception de filtres numériques

Compression avec perte, introduction au MP3

Compétence à acquérir :

Comprendre les mathématiques du filtrage et du traitement de l'information et les principes de la numérisation des signaux. Avoir une vision globale des techniques du traitement de l'information.

Université Paris Dauphine - PSL - Place du Maréchal de Lattre de Tassigny - 75775 PARIS Cedex 16 - 06/07/2024