Analyse fonctionnelle et analyse hilbertienne

ECTS : 6

Volume horaire : 58.5

Description du contenu de l'enseignement :

Fonctions Lp. Inégalités de Minkowski et de Hölder. Espace Lp, complétude, réciproque du théorème de convergence dominée. Théorèmes de densité des fonctions régulières.
Transformée de Fourier dans L1(R). Continuité, dérivabilité de la transformée de Fourier. Translation. Lemme de Riemann-Lebesgue. Transformée de Fourier de la gaussienne. Injectivité. Inversion.
Produit de convolution dans L1(R). Généralisation : inégalité de Young. Bilinéarité, associativité, commutativité. Convolution et dérivation, et intégration. Translation. Lien entre convolution et transformée de Fourier.
Produit scalaire réel, hermitien. Identité du parallélogramme, polarisation.
Projection sur un convexe fermé. Cas d'un sous-espace vectoriel fermé. Théorème de Riesz.
Orthogonalité. Familles orthonormales. Inégalité de Bessel. Bases hilbertiennes. Espace de Hilbert séparable. Égalité de Parseval.
Application : transformée de Fourier dans L2.
Séries de Fourier. Polynômes trigonométriques. Densité dans L2. Séries de Fourier et régularité. Théorème de convergence simple de Dirichlet. Théorème de convergence uniforme. Phénomène de Gibbs.

Compétence à acquérir :

Acquérir des bases en analyse fonctionnelle et en analyse hilbertienne.
Se familiariser avec les espaces de fonctions classiques qui interviennent en probabilités et en analyse.
Étudier la transformée de Fourier sur L1 et la convolution.
Se familiariser avec l'analyse hilbertienne, et l'appliquer à la transformée de Fourier dans L2 et aux séries de Fourier.