Intégrale de Lebesgue et probabilités

ECTS : 10

Volume horaire : 117

Description du contenu de l'enseignement :

INTÉGRALE DE LEBESGUE

1. Rappels sur l'intégrale de Riemann.
2. Fonctions Riemann-intégrables, fonction caractéristique de Q
3. Tribu, tribu engendrée, tribu borélienne sur R, sur la droite achevée et sur Rn, tribu produit
4. Tribu réciproque (“tribu engendrée par une v.a.”), tribu image
5. Mesures positives, probabilités
6. Fonctions mesurables, lien avec la continuité, opérations sur les fonctions mesurables, mesure image
7. Classe monotone, exemple : unicité de la mesure de Lebesgue
8. Fonctions étagées, intégrale des fonctions étagées positives
9. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées, intégrale des fonctions mesurables
10. Lemme de Fatou, théorème de convergence monotone
11. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée
12. Intégrales dépendant d'un paramètre
13. Lien avec le calcul différentiel
14. Lien avec l'intégrale de Riemann
15. Espaces L1 et L2, complétude
16. Espaces Lp, inégalités de Hölder, Jensen, Minkowski
17. Mesures produit
18. Théorème de Fubini
19. Formule du changement de variables

PROBABILITÉS

1. Espace de probabilité. Variable aléatoire et loi d'une variable aléatoire. Variables discrètes ou à densité
2. Espérance et loi d'une variable aléatoire, lois marginales
3. Moments d'ordre p, variance, inégalités associées
4. Fonction caractéristique, caractérisation de la loi, exemples
5. Indépendance
6. Loi produit, caractérisations de l'indépendance
7. Regroupements par paquets, indépendance dans le cadre d'une famille infinie
8. Lemme de Borel-Cantelli, loi faible des grands nombres, loi du 0-1
9. Notions de convergence
10. Implications entre les modes de convergence
11. Loi forte des grands nombres
12. Convergence en probabilités
13. Théorème central limite
14. Vecteurs gaussiens
15. Espérance conditionnelle dans L2
16. Théorème de Radon-Nikodym
17. Espérance conditionnelle dans L1

Compétence à acquérir :

Introduction à l’intégrale de Lebesgue et à la théorie des probabilités.

Mode de contrôle des connaissances :

Deux épreuves écrites

Bibliographie, lectures recommandées :

Document susceptible de mise à jour - 05/11/2026
Université Paris Dauphine - PSL - Place du Maréchal de Lattre de Tassigny - 75775 PARIS Cedex 16