Analyse fonctionnelle et analyse hilbertienne

ECTS : 6

Volume horaire : 58.5

Description du contenu de l'enseignement :

Rappels sur la topologie des espaces métriques. Espaces vectoriels normés. Théorème de non-compacité de Riesz. Théorème de Baire.

Fonctions Lp. Inégalités de Minkowski et de Hölder. Espace Lp, complétude, réciproque du théorème de convergence dominée. Théorèmes de densité des fonctions régulières.
Produit de convolution dans L1(R). Généralisation : inégalité de Young. Bilinéarité, associativité, commutativité. Convolution et dérivation, et intégration.

Transformée de Fourier dans L1(R). Continuité, dérivabilité de la transformée de Fourier. Translation. Lemme de Riemann-Lebesgue. Transformée de Fourier de la gaussienne. Injectivité. Inversion.Translation. Lien entre convolution et transformée de Fourier. Transformée de Fourier dans L2.

Espaces de Hilbert. Produit scalaire réel, hermitien. Identité du parallélogramme, polarisation.
Projection sur un convexe fermé. Cas d'un sous-espace vectoriel fermé. Théorème de représentation de Riesz.
Orthogonalité. Familles orthonormales. Inégalité de Bessel. Bases hilbertiennes. Espace de Hilbert séparable. Égalité de Parseval.
Application : séries de Fourier. Polynômes trigonométriques. Densité dans L2. Séries de Fourier et régularité.

Compétence à acquérir :

Acquérir des bases en analyse fonctionnelle et en analyse hilbertienne.
Se familiariser avec les espaces de fonctions classiques qui interviennent en probabilités et en analyse.
Étudier la transformée de Fourier sur L1 et la convolution.
Se familiariser avec l'analyse hilbertienne, et l'appliquer à la transformée de Fourier dans L2 et aux séries de Fourier.